

مطلوب: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2z^2 w'' + Z w' + (Z^2 - 3) w = 0 \quad (1)$$

بم: جوارر النقطة $Z=0$

الحل: نلاحظ مع بعد تقسيم طرفي المعادلة المعطاة (1) مع $2z^2$ اعطال ثبات الدالتين

$$p(z) = \frac{1}{2z} \text{ نقطة مشادة } \text{ و } q(z) = \frac{z^2-3}{12z^2} \text{ (نقاطان } z=0 \text{ مشادة } (q, p))$$

نكون $z p(z) = \frac{1}{2}$ ، $z^2 q(z) = \frac{z^2-3}{12}$ ، $z^2 q(z)$ داليتان مع $z=0$ لا- صفرية

إذا النقطة $z=0$ نقطة مشادة نظام المعادلة (1) ونبدأ مع ذلك نوجد

الحل بالنسبة لنقطة مشادة أساسية

الحل يكون في الشكل (ص: التقرن)

$$w = [z^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{\lambda+n}] \quad (2)$$

الآن نشق هذه العلاقة (معادلة الكلاخوزن) بالنسبة لـ z مرتين متتاليتين ونبدل في المعادلة

المعطاة (1) كما يلي:

الاشتقاق
(2) $\Rightarrow w' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n z^{\lambda+n-1}$

$$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n z^{\lambda+n-2}$$

وبالتدوين في معادلة (1) يكون

$$(1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\lambda)(n+\lambda-1) C_n z^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) C_n z^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{\lambda+n} - \sum_{n=0}^{\infty} 3 C_n z^{\lambda+n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) - 3] C_n z^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{\lambda+n} = 0$$

منه نجد ان لكل $n \geq 2$ في المجموع الأخير المتناسق في القوس ونقسم المعادلة مع z^{λ} فنجد:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) - 3] C_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-2} z^n = 0$$

ومن ثم نطرحه حد من المجموع الأول (ن) بدل $n=0$ ، $n=1$ فنكون:

$$2\lambda(\lambda-1) + \lambda - 3 C_0 + [2(1-\lambda)(\lambda) + (\lambda+1) - 3] C_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} [2(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda) - 3] C_n + C_{n-2} z^n = 0$$

ان C قبل المطابقة نجد : $[2\lambda(2-1) + \lambda - 3] C_0 = 0$

وبطرح $C_0 \neq 0$ نجد المعادلة المميزة للمشتق :

$$2\lambda(2-1) + \lambda - 3 = 0$$

$$2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$$

المعادلة المميزة للمشتق

لها جذور $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ و $\lambda_2 = -1$

لها جذور λ_1, λ_2

بما ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\Rightarrow (2\lambda - \frac{3}{2})(\lambda + 1) = 0$ $\Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$ و $\lambda = -1$ \Rightarrow $C_n = 0$ $\forall n \geq 2$

بما ان

بما ان المطابقة تنجح

(I) $- [2\lambda(1+1) + \lambda - 2] C_1 = 0$

(II) $- [2(n+1)(n+1-1) + (n+1) - 3] C_n + C_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2$

وبعد تبسيط المعادلة نحصل على

(II) $\Rightarrow C_n = \frac{1}{(n+1)(2n+2-1)-3} C_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

وبما ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ \Rightarrow $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ \Rightarrow $C_n = 0$ $\forall n \geq 2$

$$[w = z^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n]$$

وبما ان $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ نجد ان $a_n = 0$ $\forall n \geq 2$ \Rightarrow $C_n = 0$ $\forall n \geq 2$

من افتراض البداية

$$a_n = \frac{1}{n(2n+5)} a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

$$(\lambda = \frac{3}{2}) \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{-a_0}{18}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 0 \quad (a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0)$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{a_0}{936}$$

وبما ان

وبالتالي نحدد العلاقة a_n (حيث $n=2,3$) بدلالة a_0 .

ومن أجل $\lambda = -1$ نجد من المعادلتين الأساسيتين أنه عند كل n $b_n = 0$ و $a_n = -a_{n-2}$.

وبالتالي $a_n = -a_{n-2}$ $\forall n \geq 2$ \Rightarrow $b_n = 0$ $\forall n \geq 2$.

$$b_n = -\frac{b_{n-2}}{n(2n-5)} \quad \forall n \geq 2$$

$b = 0$ ولذا $b_n = 0$ $\forall n \geq 2$ (حيث $\lambda = -1$)

ومن ثم نحصل على التالي:

$$n=2 \Rightarrow b_2 = \frac{b_0}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow b_3 = 0 \quad (b_0 = 0 \text{ لأن})$$

$$n=4 \Rightarrow b_4 = -\frac{b_0}{24}$$

وهكذا

إذاً نحدد العلاقة b_n (حيث $n=2,3$) بدلالة b_0 .

ومن ثم نكتب العام للمعادلة المطلوبة:

$$w = a_0 Z^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{18} Z^2 + \frac{1}{936} Z^4 + \dots \right) + b_0 Z^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} Z^2 - \frac{1}{24} Z^4 + \dots \right)$$

وبصفة a_0 و b_0 ثابتان اختياريتان يمكن تحديد هاتين شروطاً بدو المعطاة.

وهو المطلوب.

5-4- الحل في جوار نقطة النهاية: دراسة حل المعادلة:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (6)$$

من الرتبة (نقطة قطب في جوار النقطة $z=0$) نجرى التحويلات التالية:

يُفرض أن $z = \frac{1}{t}$ ونجيب عن الحل في جوار الصفر، ونجد بعد التبديل:

الحل نعود للوقت $z = \frac{1}{t}$ ونضع $t = \frac{1}{z}$ فنحصل على الحل المطلوب في جوار النقطة $z=0$.

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}$$

$$\Rightarrow w' = -t^2 \cdot \frac{dw}{dt}$$

$$(\text{لأن } \frac{dz}{dt} = -t^2 = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{dt}{dz} = -t^2)$$

$$w'' = \frac{d(-t^2 \frac{dw}{dt})}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -t^2 \left[-2t \frac{dw}{dt} - t^2 \frac{d^2 w}{dt^2} \right]$$

$$\Rightarrow w'' = 2t^3 \frac{dw}{dt} + t^4 \frac{d^2w}{dt^2}$$

(الزيت متغير w و t هي صلا للمعادلة) نكتب مع المعادلة الجديدة $(Z = \frac{1}{t})$ حيث

$$t^4 \frac{d^2w}{dt^2} + (2t^3 - t^2 p(\frac{1}{t})) \frac{dw}{dt} + q(\frac{1}{t}) w = 0 \quad (2)$$

لدينا المعادلة

(الأكبر) z كانت النقطة $t=0$ نقطة شاذة قابلة للزيادة لكن في الدالتين

$$P(t) = \frac{2t^3 - t^2 p(\frac{1}{t})}{t^4} = \frac{2t - p(\frac{1}{t})}{t^2} = 2z - z^2 p(z) \quad (3)$$

$$Q(t) = \frac{1}{t^4} q(\frac{1}{t}) = z^4 q(z) \quad (4)$$

في النقطة $t=0$ و $z=\infty$ نقطة عادية للمعادلة المعطاة (1) ويكون للمعادلة (2) نقطة شاذة

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}$$

في المعادلة مستقر لكي تكون $t=0$ نقطة شاذة قابلة للزيادة للمعادلة (3) هو أن يكون

$$p(\frac{1}{t}) = 2t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \dots$$

$$p(z) = \frac{2}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots$$

وهذا يعني أن $z=\infty$ هي نقطة شاذة للمعادلة (3)

$$\left[\begin{array}{l} 2p(z) \rightarrow 2 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right]$$

ويستقر لكي تكون $t=0$ نقطة شاذة قابلة للزيادة للمعادلة (4) هو أن يكون (الفرق)

$$q(\frac{1}{t}) = b_1 t^4 + b_2 t^5 + \dots$$

$$q(z) = \frac{b_1}{z^4} + \frac{b_2}{z^5} + \dots$$

وهذا يعني أن $z=\infty$ هي نقطة شاذة للمعادلة (4) هو أن يكون (الفرق)

$$q(z) = \frac{z}{(z+1)^4}$$

$$p(z) = \frac{2z-1}{z(z+1)}$$

وإذ اننا نلاحظ أن $z = \infty$ هي نقطة من الرتبة الرابعة لـ $p(z)$ وهي

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z p(z) = 2$$

وأن $z = \infty$ هي نقطة من الرتبة الرابعة لـ $q(z)$ ، وبذلك فإننا نلاحظ أن النقطة $z = \infty$ هي نقطة عادية، وذلك يمكن أن يكون كذلك.

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

ولقد المطلوب

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z p(z) = 2$$

تفسير (تقليد) ذلك أن

$$z p(z) = \frac{z(2z-1)}{z(z+1)} = \frac{2z-1}{z+1} = \frac{1}{z+1}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z p(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z}{z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{z}} = 2$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z p(z) = 2$$

ولقد المطلوب

نهاية المحاضرة